Bewegung einer auf horizontaler Ebene rollenden Kugel, deren Schwerpunkt im Mittelpunkt liegt.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER

HOHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARLS-UNIVERSITÄT

ZU

TÜBINGEN

VORGELEGT VON

EUGEN STÜBLER

aus

STUTTGART.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Stuttgart.
Heinrich Enderlen, Hofbuchhändler.
1902.

Von der Fakultät angenommen den 9. August 1902.

Druck von A. Bonz' Erben in Stuttgart.

Meinen lieben Eltern

in herzlicher Dankbarkeit gewidmet.

Bewegung einer auf horizontaler Ebene rollenden Kugel, deren Schwerpunkt im Mittelpunkt liegt.

In seiner Abhandlung: Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertius, Gött. Nachr. 1896 p. 150 hat Herr Hölder eine von Hertz gemachte Beobachtung über die Anwendbarkeit des Hamilton'schen Prinzips aufgeklärt. Das Beispiel der auf einer horizontalen Ebene rollenden Kugel, welches Hertz anführt und von dem in der Hölder'schen Arbeit die richtigen Bewegungsgleichungen abgeleitet werden, ist von Padova und Crescini (Rendi conti 1888 p. 507 und 1889 p. 204) mit dem Prinzip von Hamilton bezw. der Hamilton'schen Funktion tatsächlich so behandelt worden, dass die Resultate nicht der wahren Bewegung entsprechen. Sie haben in die Formel der lebendigen Kraft, von der sie ausgehen, von vornherein die Beziehung aufgenommen, welche bei der rollenden Bewegung zwischen Drehungs- und Verschiebungsgeschwindigkeit besteht. Dies ist aber nicht richtig, da die variierte Kugelbewegung durchaus nicht eine rein rollende sein muss.

Hier soll im Anschluss an die Hölder'schen Gleichungen die wahre Bewegung einer auf horizontaler Ebene ohne Gleitung frei rollenden Kugel untersucht und insbesondere der Fall ausgeführt werden, wo zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. v. Brill, meinen herzlichsten Dank auszudrücken für die Anregung und Förderung, welche er mir während meiner Studien und bei dieser Arbeit zu teil werden liess.

I.

Der Halbmesser der Kugel sei 1, ihre Masse M, die Hauptträgheitsmomente P Q R. Das Koordinatensystem OPQR durch den Mittel- und Schwerpunkt O der Kugel fällt mit den Hauptträgheitsachsen zusammen. In Bezug auf dieses System sind die Richtungskosinusse der nach oben gerichteten Vertikalen $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3$, die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit p q r. Ausserdem benützen wir ein durch O gehendes Koordinatenkreuz OΞHZ, das sich bei der Bewegung stets parallel verschiebt und dessen Z-achse vertikal nach oben gerichtet ist. Die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit in Bezug auf dieses System seien $\pi\ \varkappa\ \rho$.

Wendet man das Hamilton'sche Prinzip in der richtigen Weise an, d. h. verwendet man die beim Rollen bestehende Beziehung zwischen Drehungs- und Verschiebungsgeschwindigkeit zunächst nur bei den den Variationen entsprechenden Verrückungen und nimmt erst, nachdem die Differenzialgleichungen abgeleitet sind, an diesen die aus der Bedingung des Rollens sich ergebenden Vereinfachungen vor, so lauten die Bewegungsgleichungen (Gött. Nachr. 1896 p. 156):

$$(P + M(\gamma_2^2 + \gamma_3^2))\frac{dp}{dt} - M\gamma_1\gamma_2\frac{dq}{dt} - M\gamma_1\gamma_3\frac{dr}{dt} = (Q - R)\,qr$$

$$(Q + M(\gamma_3^2 + \gamma_1^2))\frac{dq}{dt} - M\gamma_2\gamma_3\frac{dr}{dt} - M\gamma_2\gamma_1\frac{dp}{dt} = (R - P)\,rp$$

$$(R + M(\gamma_1^2 + \gamma_2^2))\frac{dr}{dt} - M\gamma_3\gamma_1\frac{dp}{dt} - M\gamma_3\gamma_2\frac{dq}{dt} = (P - Q)\,pq.$$

Hiezu kommen noch die bekannnten Gleichungen (Kirchhoff, Mechanik p. 50):

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p.$$

Diese lassen sich ersetzen durch $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ und zwei andere, nämlich erstens:

$$p \frac{d\gamma_1}{dt} + q \frac{d\gamma_2}{dt} + r \frac{d\gamma_3}{dt} = 0. \qquad (1)$$

Nun sind $\frac{d\gamma_1}{dt}\ \frac{d\gamma_2}{dt}\ \frac{d\gamma_3}{dt}$ entgegengesetzt gleich den Geschwindigkeitskomponenten des Mittelpunkts in Bezug auf das System PQR. Dies folgt aus einer einfachen geometrischen Betrachtung. Ist z. B. der Neigungswinkel der R-achse gegen die Vertikale $= \vartheta$, also $\cos \vartheta = \gamma_3$, so ist die Wegkomponente des Kugelmittelpunkts in der Ebene ROZ, während der Zeit dt gleich $d\vartheta$, also ihre Projektion auf OR $d\vartheta \sin \vartheta = - d\gamma_3$. Gleichung (1) zeigt daher, dass die Fortschrittsrichtung des Kugelmittelpunkts auf der Drehachse senkrecht steht.

Die andere Gleichung, welche wir aus den angegebenen Gleichungen ableiten, lautet:

$$Pp \frac{d\gamma_1}{dt} + Qq \frac{d\gamma_2}{dt} + Rr \frac{d\gamma_3}{dt} = (Q - R) qr\gamma_1 + (R - P) rp\gamma_2 + (P - Q) pq\gamma_3. \qquad (2)$$

Schreibt man jetzt die Bewegungsgleichungen in der Form an:

$$\begin{aligned} (P + M) \frac{dp}{dt} - M\gamma_1 \frac{d\varrho}{dt} &= (Q - R) qr \\ (Q + M) \frac{dq}{dt} - M\gamma_2 \frac{d\varrho}{dt} &= (R - P) rp \qquad (3) \\ (R + M) \frac{dr}{dt} - M\gamma_3 \frac{d\varrho}{dt} &= (P - Q) pq \end{aligned}$$

wo:

$$\rho = \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r \qquad (4)$$

und nach (1)

$$\frac{d\rho}{dt} = \gamma_1 \frac{dp}{dt} + \gamma_2 \frac{dq}{dt} + \gamma_3 \frac{dr}{dt}$$

so kann man aus (3) durch Multiplizieren mit $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3$ und Addieren unter Benützung von (2) die Integralgleichung ableiten:

$$Pp\gamma_1 + Qq\gamma_2 + Rr\gamma_3 = C_1 \qquad (5)$$

und jetzt durch Multiplizieren von (3) mit Pp, Qq, Rr eine weitere:

$$P(P+M)p^2 + Q(Q+M)q^2 + R(R+M)r^2 - 2MC_1\rho = C_2. \qquad (6)$$

Hiezu kommt noch das Integral der lebendigen Kraft:

$$(P+M)p^2 + (Q+M)q^2 + (R+M)r^2 - MC_2 = 2T. \qquad (7)$$

Für die Gleichung (5) lässt sich eine einfache Deutung geben. Denkt man sich die Kugel so bewegt, dass die Hauptträgheitsachsen in dem Achsensystem ΞHZ immer einen Augenblick fest bleiben, so bedeuten Pp, Qq, Rr die Komponenten eines Drehstosses, der in diesem Moment nötig wäre, um der Kugel ihre tatsächliche Drehung zu geben. Gleichung (5) sagt aus, dass, in der Bezeichnungsweise des Werkes über den Kreisel von Klein und Sommerfeld, der Endpunkt des entsprechenden Impulsvektors immer in einer horizontalen Ebene liegt, welche vom Kugelmittelpunkt die Entfernung C_1 hat. Da nun unsere Kugelbewegung sich ansehen lässt als die Bewegung eines Kreisels, auf den ein Kräftepaar wirkt, welches durch einen horizontalen Vektor darzustellen ist, so kann zu dem Impulsvektor, der beim kräftefreien Kreisel nach Grösse und Richtung fest wäre, auch nur eine horizontale Komponente in jedem Moment hinzutreten.

Die Formeln vereinfachen sich erheblich, wenn

wir $C_1 = 0$ setzen, so dass der Impulsvektor stets horizontal liegt. Für diesen Fall sollen noch einfachere Differenzialgleichungen abgeleitet werden.

II.

Spezieller Fall $C_1 = 0$.

Zwischen den Variabeln p q r γ_1 γ_2 γ_3 und ρ, welchen wir noch die Geschwindigkeit υ des Kugelmittelpunktes beifügen, bestehen 7 Gleichungen, die von der Zeit t unabhängig sind.

Setzt man

$$2T - M\upsilon^2 = y$$
$$2T + M\rho^2 = z$$

und zur Abkürzung

$$P + M = \mathfrak{P}$$
$$Q + M = \mathfrak{Q}$$
$$R + M = \mathfrak{R}$$

so kann man die Gleichungen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 &= y \\ \mathfrak{P}p^2 + \mathfrak{Q}q^2 + \mathfrak{R}r^2 &= z \\ P^2p^2 + Q^2q^2 + R^2r^2 &= C_2 - My \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} Pp\gamma_1 + Qq\gamma_2 + Rr\gamma_3 &= 0 \\ p\gamma_1 + q\gamma_2 + r\gamma_3 &= \rho \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$pd\gamma_1 + qd\gamma_2 + rd\gamma_3 = 0. \quad (10)$$

Aus den Gleichungen (8) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} DMp^2 &= (Q - R)(C_2M - \mathfrak{Q}\mathfrak{R}y + QRz) \\ DMq^2 &= (R - P)(C_2M - \mathfrak{R}\mathfrak{P}y + RPz) \\ DMr^2 &= (P - Q)(C_2M - \mathfrak{P}\mathfrak{Q}y + PQz) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

wo D Abkürzung ist für den Ausdruck:

$$(Q-R)\,QR+(R-P)\,RP+(P-Q)\,PQ=-(Q-R)(R-P)(P-Q).$$

Aus (9) bestimmen sich $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3$ durch folgende Gleichungen, in denen zunächst noch ρ bleiben möge:

$$\begin{aligned}
[(C_2-My)\,\rho^2+\delta^2]\,\gamma_1 &= (C_2-\mathfrak{P}y)\,p\rho-(Q-R)\,qr\delta\\
[(C_2-My)\,\rho^2+\delta^2]\,\gamma_2 &= (C_2-\mathfrak{Q}y)\,q\rho-(R-P)\,rp\delta \quad (12)\\
[(C_2-My)\,\rho^2+\delta^2]\,\gamma_3 &= (C_2-\mathfrak{R}y)\,r\rho-(P-Q)\,pq\delta.
\end{aligned}$$

Dabei bedeutet δ den Ausdruck:

$$-[(Q-R)\,qr\gamma_1+(R-P)\,rp\gamma_2+(P-Q)\,pq\gamma_3] \text{ oder } \sqrt{\frac{2TC_2-(C_2+2MT)\,y}{M}}.$$

Um zu einer Differenzialgleichung zwischen y und z zu gelangen, bestimmen wir dp aus Differenzialgleichungen, welche man aus (8) und (10) erhält, nämlich:

$$\begin{aligned}
2[\mathfrak{P}p\,dp+\mathfrak{Q}q\,dq+\mathfrak{R}r\,dr] &= dz\\
2[Pp\,dp+Qq\,dq+Rr\,dr] &= dy\\
2M\rho\,[\gamma_1\,dp+\gamma_2\,dq+\gamma_3\,dr] &= dz.
\end{aligned}$$

Man findet:

$$2M\rho\delta\,dp=-(\mathfrak{Q}q\gamma_3-\mathfrak{R}r\gamma_2)\,\rho dy+[(Qq\gamma_3-Rr\gamma_2)\,\rho-(Q-R)\,qr]\,dz.$$

Dividiert man noch mit $\rho\delta$, so werden die Koefficienten von dy und dz nach (12)

$$-\frac{(C_2-Pz)\,p\delta+(Q-R)\,qr\,C_2\rho}{[(C_2-My)\,\rho^2+\delta^2]\,\delta}$$

und

$$\frac{(C_2-\mathfrak{P}y)\,p\rho-(Q-R)\,qr\,\delta}{[(C_2-My)\,\rho^2+\delta^2]\,\rho}.$$

Multipliziert man dann noch mit $[(C_2-My)\,\rho^2+\delta^2]\,\frac{Dp}{Q-R}$ und führt für p^2 und $2p\,dp$ die aus (11) sich ergebenden Werte ein, so erhält man die in PQR und pqr symmetrisch gebaute Differenzialgleichung:

$$[(C_2 - My)\,z - C_2 y]\;(-\mathfrak{QR}\,dy + QR\,dz)$$

$$+\;[(C_2 - Pz)\,(C_2 M - \mathfrak{QR}y + QRz) + DMC_2\frac{\rho}{\delta}pqr]\,dy$$

$$-\,[(C_2 - \mathfrak{P}y)\,(C_2 M - \mathfrak{QR}y + QRz) - DM\frac{\delta}{\rho}pqr]\,dz = 0.$$

Geordnet lautet die Gleichung:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\rho\delta Z + C_2\rho^2\Pi}{\rho\delta Y - \delta^2\Pi} \qquad (13)$$

wobei:

$$Y = C_2^2 M - C_2 M(-M + \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} + \mathfrak{R})y + \mathfrak{PQR}y^2 - PQRyz$$

$$Z = C_2^2 M - C_2 M\,(M + P + Q + R)\,z + \mathfrak{PQR}yz - PQRz^2$$

$$\Pi^2 = (MDpqr)^2$$

$$-\frac{1}{M}(C_2 M - \mathfrak{QR}y + QRz)(C_2 M - \mathfrak{RP}y + RPz)\,(C_2 M - \mathfrak{PQ}y + PQz).$$

Führt man wieder statt y und z ihre Werte $2T - M\upsilon^2$ und $2T + M\rho^2$ ein, dann kann man die Differenzialgleichung schreiben:

$$\delta^2(\rho^2 Y^2 - \delta^2\Pi^2)\left(\frac{d\rho^2}{d\upsilon}\right) + 2\upsilon\delta\rho\,(YZ + C_2\Pi^2)\frac{d\rho}{d\upsilon} + \upsilon^2(\delta^2 Z^2 - C_2\rho^2\Pi^2) \quad 0. \qquad (14)$$

Um sie geometrisch zu deuten, benützen wir ein Hilfskoordinatensystem $O\Xi'H'Z'$, dessen Z'-achse vertikal liegt, und dessen Ξ'-achse durch die Fortschreitungsrichtung des Kugelmittelpunkts bestimmt ist. Dann liegt der Drehvektor $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ stets in der H'Z'-ebene und sein Endpunkt hat die Koordinaten υ und ρ. Die Bahn dieses Endpunkts in der H'Z'-ebene wird also durch unsere Differenzialgleichung bestimmt. Die Integration muss, wie die unten folgende Behandlung des besonderen Falls (P = Q) zeigt, mindestens elliptische Funktionen erfordern. Von den Integralkurven lassen sich wenigstens einige Eigenschaften aus der Diskriminante von (14) ableiten. Diese zerfällt in eine Reihe von Faktoren:

$$\upsilon^2\delta^2\Pi^2\,(C_2\rho^2Y + \delta^2Z)^2$$

$\delta = 0$ oder $\upsilon = \pm\dfrac{2T}{\sqrt{C_2 + 2MT}}$ ist singuläre Lösung der Differenzialgleichung und Umhüllungslinie der Integralkurven. Da nach (12) δ stets reell sein muss. so ist $\dfrac{4T^2}{C_2 + 2MT}$ der kleinste Wert, den υ^2 annehmen kann.

$\Pi^2 = 0$ oder $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ befriedigen die Differenzialgleichung nicht. Die 3 Ellipsen, welche durch diese Gleichungen dargestellt werden, dürfen aber von den Integralkurven nur in ihren gegenseitigen Schnittpunkten und in ihren Schnittpunkten mit $\delta = 0$ überschritten werden, da sonst die Diskriminante negativ werden würde. Die 3 Ellipsen sind somit Ort der Spitzen der Integralkurven. Eine Bestätigung hiefür liefern die unten folgenden Differenzialgleichungen für die Zeit (15).

$\upsilon = 0$ und $C_2\rho^2Y + \delta^2Z = 0$ geben den Ort von Punkten, in denen je 2 Integralkurven einander berühren. Letztere Gleichung zerfällt wieder in zwei, nämlich:

$$C_2^2M - 2T\,[C_2M(M+P+Q+R) - \mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}y + PQRz] = 0$$

was in υ und ρ ausgedrückt eine Ellipse ergibt und:

$$C_2\,(z - y) - Myz = 0 \quad \text{oder:}$$

$$M^2\upsilon^2\rho^2 + (C_2 + 2MT)\,\upsilon^2 + (C_2 - 2MT)\,\rho^2 - 4T^2 = 0.$$

Diese Kurve 4. Ordnung liegt übrigens ganz zwischen den Geraden $\upsilon = +\dfrac{2T}{\sqrt{C_2 + 2MT}}$ und $\upsilon = -\dfrac{2T}{\sqrt{C_2 + 2MT}}$. Die ihr entsprechenden Werte von υ und ρ werden also tatsächlich nie erreicht.

Für die Zeit ergibt sich eine Differenzialgleichung

aus einer der Gleichungen (3) durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke aus (11) und (12). Sie erhält nach gehöriger Ordnung der Glieder die Form:

$$[C_2(z-y) - Myz](\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\frac{dy}{dt} - PQR\frac{dz}{dt} + 2\Pi) =$$

$$M(Y - \frac{\delta}{\rho}\Pi)\frac{dz}{dt}.$$

Nach (13) ist dann auch: (15)

$$[C_2(z-y) - Myz](\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\frac{dy}{dt} - PQR\frac{dz}{dt} + 2\Pi) =$$

$$M(Z + C_2\frac{\rho}{\delta}\Pi)\frac{dz}{dt}.$$

Leicht zu bestimmen ist der Weg, den der Endpunkt des Impulsvektors $\sqrt{P^2p^2 + Q^2q^2 + R^2r^2}$ in der $\Xi'H'$-ebene beschreibt. Dividiert man nämlich Gleichung (2) mit $\sqrt{\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2} = v$, so sieht man, dass der Punkt (Pp, Qq, Rr) in einer zur Ξ'-achse senkrechten Ebene liegt, welche von O die Entfernung $\frac{\delta}{v}$ hat. Der Impulsvektor hat also in der Fortschreitungsrichtung die Komponente

$$\xi^1 = \frac{\delta}{v} = \sqrt{\frac{2TC_2 - (C_2 + 2MT)y}{2T - y}}.$$

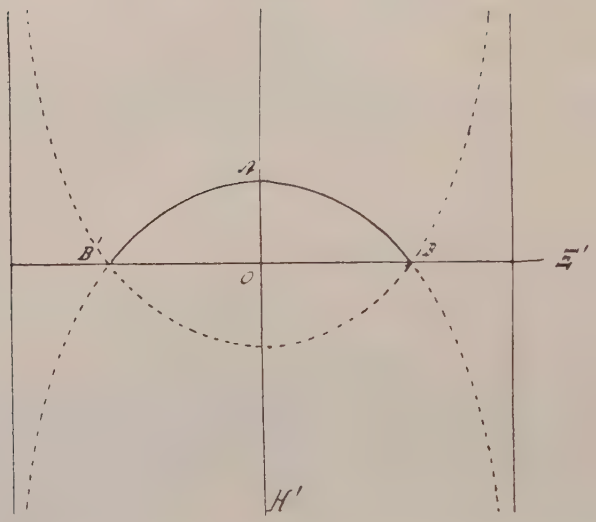
Aus der Länge des Vektors ergibt sich die zweite Komponente:

$$\eta^1 = \frac{y}{v} = \sqrt{\frac{My^2}{2T - y}}.$$

Daraus erhält man als Bahnkurve des Endpunkts eine einfache Kurve 4. Ordnung mit der Gleichung:

$$\eta^{1\,2}(C_2 + 2MT - \xi^{1\,2}) - (C_2 - \xi^{1\,2})^2 = 0.$$

Figur 1.



Den kleinsten Wert hat der Impuls für $\delta = 0$. nämlich $\frac{C_2}{\sqrt{C_2 + 2MT}}$, in Figur 1 dargestellt durch den Vektor OA. Andererseits können die Doppelpunkte der Kurve auf der Ξ'-achse, in welchen der Impulsvektor den Wert $\pm\sqrt{C_2}$ hat, niemals erreicht werden. da sonst

$$y = Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 = 0$$

und also auch p, q und r einzeln gleich Null werden müssten. Der Vektorendpunkt kann sich also nur auf dem Bogen BAB' hin und herbewegen.

III.

Kugel mit 2 gleichen Hauptträgheitsmomenten.

Besonders einfach wird der Fall, wo zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind. Dieser soll von jetzt ab ausschliesslich behandelt und dabei wieder

$C_2 \neq 0$ angenommen werden. Die Kugelbewegung ist insofern nahe mit der Kreiselbewegung verwandt, als letztere einen Spezialfall der ersteren bildet, den man erhält, wenn man $M = 0$ setzt. Wir können also stets leicht die zu behandelnde Bewegung mit der Bewegung des symmetrischen Kreisels vergleichen.

Ist

$$P = Q,$$

so lässt sich $p^2 + q^2$, r und ρ unmittelbar algebraisch in γ_3 oder $\cos \vartheta$ ausdrücken, während p und q sowie γ_1 und γ_2 nur nach einer weiteren Integration und zwar in elliptischen Funktionen ausdrückbar sind.

Als Konstante nehmen wir statt $T\ C_1\ C_2$ die Anfangswerte $\vartheta_0\ \rho_0\ r_0$, und q_0 als denjenigen von $\sqrt{p^2 + q^2}$ und leiten aus Gleichung (4) und den Integralgleichungen (5), (6), (7) durch Elimination von den Ausdrücken: $p\gamma_1 + q\gamma_2$ und $p^2 + q^2$ ab:

$$\begin{gathered} Q(\rho - \rho_0) = (Q - R)(r\cos\vartheta - r_0\cos\vartheta_0) \\ (Q-R)(R+M)(r^2 - r_0^2) \quad M[Q(\rho-\rho_0)^2 + 2(Q-R)(\rho-\rho_0) r_0 \cos\vartheta_0]. \end{gathered} \tag{17}$$

Im Folgenden benützen wir die Abkürzungen:

$$a^2 = \frac{R(M+Q)}{M(Q-R)} \qquad \text{wo also: } b^2 - a^2 = 1$$

$$b^2 = \frac{Q(M+R)}{M(Q-R)}.$$

Diese Ausdrücke können zwar auch negativ werden. Allein es genügt zunächst die Formeln nur für einen Fall etwa wo $Q > R$ ist aufzuschreiben und die für den anderen Fall ($Q < R$) erst später und nur da folgen zu lassen, wo sie sich nicht ohne weiteres aus dem ersten ableiten lassen.

Die Gleichungen (17) liefern r und ρ in Funktion von ϑ.

$$r^2 \cos^2 \vartheta - r_0^2 \cos^2 \vartheta_0 = b^2 (r^2 - r_0^2).$$

Diese Gleichung gibt als Ort für den Endpunkt des Vektors r ein Umdrehungsellipsoid. dessen senkrechte Achse wir r_1 nennen und im Folgenden zur Abkürzung statt r_0 benützen.

Statt ϑ führen wir als unabhängige Variable eine zur Vertikalkomponente des Vektors r proportionale Grösse x ein, die sich bestimmt aus:

$$r \cos \vartheta = r_1 x,$$

dann wird:

$$r = \frac{r_1}{b} \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{oder:} \quad \frac{r}{r_0} = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2 + x_0^2}}. \tag{18}$$

ϑ ist mit x verbunden durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \vartheta &= \frac{a}{b} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \\ \cos \vartheta &= \frac{bx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ \sin \vartheta &= \frac{a \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Weiter findet man:

$$\rho - \rho_0 = \frac{Q - R}{Q} r_1 (x - x_0).$$

Zur Berechnung von $p^2 + q^2$ führen wir eine besondere Anfangslage ein, für welche $\rho = r \cos \vartheta$ ist und die, wie sich zeigen wird, dadurch sich auszeichnet, dass sie immer reell wird, wenn der ihr entsprechende Wert von ρ, den wir ρ_1 nennen, kleiner als r_1 ist. Die Konstante C_1 ist dann gleich $R\rho_1$ zu setzen und man erhält, wenn q'_1 den entsprechenden Wert von $\sqrt{p_2 + q_2}$ bedeutet:

$$(Q - R)(Q + M)(p^2 + q^2 - q'^2_1) + RM(\rho - \rho_1)^2 = 0$$

und, da $$\rho - \frac{R}{Q}\rho_1 = \frac{Q-R}{Q} r_1 x \qquad (20)$$

$$Q^2a^2(p^2+q^2-q'^2_1) + R^2(\rho_1 - r_1x)^2 = 0. \qquad (21)$$

In den allgemeinen Anfangswerten ergibt sich:
$Q^2a^2(p^2+q^2-q_0^2) = Rr_1[Rr_1(x_0^2-x^2) - 2Q\rho_0(x_0-x)]$.

Zeitintegral.

Um die Zeit in Funktion von ϑ oder x auszudrücken, leiten wir aus der Gleichung:

$$\frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p$$

mittels (4) ab:

$$\left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 = (1-\gamma_3^2)(p^2+q^2) - (\rho - r\gamma_3)^2$$

p^2+q^2, r, ρ und γ_3 sind durch die entsprechenden Werte in x zu ersetzen und man erhält, wenn man noch $\frac{Q}{R}\frac{a}{b}q'_1$ abgekürzt q_1 schreibt:

$$dt = -\frac{Q}{R}\frac{a^2dx}{(a^2+x^2)\sqrt{q_1^2(1-x^2)-(\rho_1-r_1x)^2}}. \qquad (22)$$

Unter der Wurzel steht eine Funktion 2. Grads in x, welche uns Aufschluss gibt über die Grenzen, zwischen die x und ϑ eingeschlossen ist. Ihre Diskriminante ist:

$$q_1\sqrt{q_1^2+r_1^2-\rho_1^2} = q_1\varkappa_1.$$

Die neue Konstante $\varkappa_1$ soll der Symmetrie wegen eingeführt werden. Sie ist mit den anderen Konstanten verbunden durch die Gleichung

$$\varkappa_1^2 + \rho_1^2 = q_1^2 + r_1^2.$$

Als kleinster und grösster Wert von x ergibt sich dann:

$$x_1 = \frac{r_1\rho_1 - q_1\varkappa_1}{r_1^2+q_1^2}$$

und $$x_2 = \frac{r_1\rho_1 + q_1\varkappa_1}{r_1^2 + q_1^2}.$$

Ist $|\rho_1| < |r_1|$, so liegt, wie leicht zu zeigen, der Wert $\frac{\rho_1}{r_1}$ zwischen x_1 und x_2. x kann dann den reciproken Wert $\frac{r_1}{\rho_1}$ nicht annehmen, da es schon durch die Gleichungen (19) auf das Intervall zwischen -1 und $+1$ beschränkt ist. Das Umgekehrte gilt für $\rho_1 > r_1$. Einer der beiden Werte $\frac{\rho_1}{r_1}$ und $\frac{r_1}{\rho_1}$ wird also immer reell, in dem Fall $r_1 = \rho_1$ beide.

Verschwindet die Diskriminante $q_1\varkappa_1$, so wird x und damit ϑ konstant. Für $q_1 = 0$ wird nämlich $x = \frac{\rho_1}{r_1}$, für $\varkappa_1 = 0$ $x = \frac{r_1}{\rho_1}$.

Zur Integration von (22) transformieren wir mit:

$$\frac{x_2 - x}{x - x_1} = y^2. \tag{23}$$

Man hat dann eine rationale Function zu integrieren:

$$\sqrt{q_1^2 + r_1^2}\,\frac{R}{Q}\,dt = \frac{2a^2(1+y^2)\,dy}{(x_1^2 + a^2)y^4 + 2(x_1x_2 + a^2)y^2 + (x_2^2 + a^2)}. \tag{24}$$

Ist $Q > R$, also a^2 positiv, so führen wir für die Koëfficienten des Nenners die Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} x_1^2 + a^2 &= A^2 \\ x_1x_2 + a^2 &= B^2 \\ x_2^2 + a^2 &= C^2 \end{aligned} \tag{25}$$

und benützen die Integrale:

$$\begin{aligned} z &= \int \frac{Ay^2 + C}{A^2y^4 + 2B^2y^2 + C^2}\,dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(AC + B^2)}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(AC+B^2)}\,y}{C - Ay^2} \end{aligned} \tag{26}$$

und:

$$z' = \int \frac{Ay^2 - C}{\sqrt{A^2y^4 + 2B^2y^2 + C^2}}\,dy \qquad (26)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(AC - B^2)}} \log \sqrt{\frac{Ay^2 - \sqrt{2(AC - B^2)}\,y + C}{Ay^2 + \sqrt{2(AC - B^2)}\,y + C}}.$$

So wird:

$$\sqrt{q_1^2 + r_1^2}\,\frac{R}{Qa^2}\,t = \frac{C + A}{AC}\,z + \frac{C - A}{AC}\,z' = \frac{z + z'}{A} + \frac{z - z'}{C}. \qquad (27)$$

dabei wird für $x = x_2$ $t = 0$.

Ist aber $Q < R$, so ist a^2 durch $-a'^2$ zu ersetzen. Führt man dann als Hilfsintegrale ein:

$$\zeta = \int \frac{a'dy}{(x_1 - a')\,y^2 + (x_2 - a')}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x_1 - a')(x_2 - a')}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x_1 - a'}{x_2 - a'}}\,y$$

und: (28)

$$\zeta' = \int \frac{a'dy}{(x_1 + a')\,y^2 + (x_2 + a')}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(x_1 + a')(x_2 + a')}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x_1 + a'}{x_2 + a'}}\,y$$

so wird:

$$\sqrt{q_1^2 + r_1^2}\,\frac{R}{Q}\,t = \zeta - \zeta'. \qquad (29)$$

Bahn der Körperachse und der Drehachse.

Zur Bestimmung der Bahnen der Körperachse und Drehachse, sowie der Bahn des Endpunkts vom Drehvektor $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ ist der 2. Euler'sche Winkel φ, welcher von der Horizontalprojektion der Körperachse und der Ξ-achse eingeschlossen wird, in der unabhängigen Variabeln auszudrücken.

Dem 3. Euler'schen Winkel f, der im veränderlichen System PQR dieselbe Bedeutung hat wie φ im

System ΞHZ, soll das entgegengesetzte Vorzeichen gegeben werden wie bei Kirchhoff. So erhält man auf der Kugeloberfläche in den Endpunkten der positiven Achsen als positive Drehrichtung immer diejenige, welche dem Drehsinn des Uhrzeigers entspricht. $\frac{d\varphi}{dt}$ oder φ' ist dann zu berechnen aus:

$$\begin{aligned} r &= f' + \varphi' \cos\vartheta \\ \rho &= \varphi' + f' \cos\vartheta \end{aligned} \tag{30}$$

Man erhält:

$$\varphi' = \frac{\rho - r\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} = \frac{R}{Q}\,\frac{(a^2+x^2)(\rho_1 - r_1 x)}{a^2(1-x^2)} \tag{31}$$

und weiter:

$$d\varphi = -\frac{(\rho_1 - r_1 x)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{q_1^2 - \rho_1^2 + 2r_1\rho_1 x - (q_1^2 + r_1^2)x^2}}$$

woraus:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 \sin\varphi &= \frac{r_1 - \rho_1 x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \varkappa_1 \cos\varphi &= \frac{\sqrt{\varkappa_1^2(1-x^2) - (r_1 - \rho_1 x)^2}}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned} \tag{32}$$

Dabei wird $\varphi = 90^0$ für $x = x_1$ oder x_2. Für die Komponenten des Vektors r ergibt sich jetzt:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= r\sin\vartheta\cos\varphi = \frac{a}{b}\frac{r_1}{\varkappa_1}\sqrt{q_1^2 - \rho_1^2 + 2r_1\rho_1 x - (q_1^2 + r_1^2)x^2} \\ \eta &= r\sin\vartheta\sin\varphi = \frac{a}{b}\frac{r_1}{\varkappa_1}(r_1 - \rho_1 x) \\ \zeta &= r\cos\vartheta \qquad\quad = r_1 x. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Sein Endpunkt beschreibt also eine Ellipse, über deren Lage am deutlichsten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} &= \frac{r_1^2}{b^2} \\ \varkappa_1 \frac{\eta}{a} + \rho_1 \frac{\zeta}{b} &= \frac{r_1^2}{b} \end{aligned} \tag{34}$$

Aufschluss geben.

Setzte man $R = Q$ (Fall der homogenen Kugel) oder $M = 0$ (Kugelkreisel), dann würden diese Gleichungen (da $a = b$) einen Kreis bedeuten. Die Körperachse würde einen Kreiskegel beschreiben; für den Neigungswinkel ϑ_0 von dessen Achse gegen die Vertikale gilt

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{\varkappa_1}{\rho_1}$$

und für seinen erzeugenden Winkel ε

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{q_1}{r_1}.$$

Aus diesem besonderen Fall lässt sich aber der allgemeine leicht ableiten; man braucht nach (33) bloss die Ξ- und H-koordinaten beim Kegel und Kreis im Verhältnis $\frac{a}{b}$ zu verkürzen (bezw. zu verlängern).

Um die Bahn der Drehachse zu bestimmen, suchen wir die Komponenten $\xi' \; \eta' \; \zeta'$ des Vektors $\sqrt{p^2 + q^2}$ oder noch einfacher die Komponenten $Q\xi'$, $Q\eta'$, $Q\zeta'$ des Vektors $Q\sqrt{p^2 + q^2}$. Von diesem Impulsvektor kennt man die Länge und seine senkrechte Komponente $Q\zeta'$, welche mit $R\zeta$, der senkrechten Komponente des Vektors Rr, zusammen C_1 oder $R\rho_1$ ergeben muss.

$$Q\zeta' + R\zeta = R\rho_1.$$

Benützt man noch die Bedingung, dass die Vektoren auf einander senkrecht stehen:

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0$$

und führt zur Abkürzung

$$\rho_1 - r_1 x = q_1 x'$$

ein, so wird:

$$\xi\xi' + \eta\eta' = -\frac{R}{Q} q_1 r_1 x x'.$$

Aus der Länge der Vektoren leitet man ab:

$$Q^2 (\xi'^2 + \eta'^2) = R^2 \frac{b^2}{a^2} q_1^2 (1 - x'^2)$$

$$R^2(\xi^2+\eta^2) = R^2\frac{b^2}{a^2}r_1^2(1-x^2).$$

Da aber:

$$(\xi\eta'-\eta\xi')^2 = (\xi^2+\eta^2)(\xi'^2+\eta'^2) - (\xi\xi'+\eta\eta')^2$$

so wird:

$$\xi\eta'-\eta\xi' = \frac{R}{Q}r_1q_1\sqrt{1-x^2-x'^2}.$$

Die Berechnung der gesuchten Komponenten ergibt dann:

$$\begin{aligned} Q\xi' &= -R\frac{b}{a}\frac{r_1q_1}{\varkappa_1}\sqrt{1-x^2-x'^2} \\ Q\eta' &= R\frac{b}{a}\frac{q_1}{\varkappa_1}(q_1-\rho_1x') \\ Q\zeta' &= Rq_1x'. \end{aligned} \tag{35}$$

Der Endpunkt des Vektors $\sqrt{p^2+q^2}$ beschreibt eine Ellipse mit den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\xi'^2+\eta'^2}{b^2}+\frac{\zeta'^2}{a^2} &= \frac{R^2}{Q^2}\frac{q_1^2}{a^2} \\ \varkappa_1\frac{\eta'}{b}+\rho_1\frac{\zeta'}{a} &= \frac{R}{Q}\frac{q_1^2}{a}. \end{aligned} \tag{36}$$

Auch hier vergleichen wir die Kugel- mit der entsprechenden Kreiselbewegung ($M = 0$). Die Ellipse geht hervor aus dem entsprechenden Kreis durch Verlängerung (bezw. Verkürzung) der Ξ- und H-koordinaten im Verhältnis $\frac{b}{a}$. Für den erzeugenden Winkel des zugehörigen Kreiskegels gilt $\operatorname{tg}\varepsilon' = \frac{r_1}{q_1}$, während seine Achse mit der des oben beschriebenen Kreiskegels zusammenfällt.

In Tafel I ist nach der Methode der darstellenden Geometrie der Weg des Impulsvektors $\sqrt{Q^2(p^2+q^2)+R^2r^2}$ konstruiert. Bei der Kreiselbewegung beschreiben die Endpunkte der Vektoren Rr und $Q\sqrt{p^2+q^2}$ Kreise mit den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\xi^2+\eta^2+\zeta^2&=R^2r_1^2\\ \varkappa_1\eta+\rho_1\zeta&=Rr_1\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2&=R^2q_1^2\\ \varkappa_1\eta'+\rho_1\zeta'&=Rq_1.\end{aligned}\right\}$$

Sie sind in der Tafel durch unterbrochene Linien dargestellt. Beide Kreise haben den Halbmesser $R\frac{r_1 q_1}{\sqrt{q_1^2+r_1^2}}$. Von diesen ausgehend gelangt man zu den Ellipsen der Kugelbewegung, indem man die Ξ- und H-Koordinaten beim einen im Verhältnis a : b verkürzt, beim andern im Verhältnis b : a verlängert. Auch diese Ellipsen sind durch unterbrochene Linien dargestellt. Es ist gleichgültig, welche von beiden man als Bahn des Vektors Rr (Körperachse) ansehen will. Um anzudeuten, in welcher Richtung die Ellipsen durchlaufen werden, sind die Scheitel mit den Buchstaben A′B′C′D′ bezw. A″B″C″D″ versehen. Aus den Vektoren OA′ und OA″ ergibt sich dann der Impulsvektor OA. OA′AA″ ist dabei ein Rechteck. Während aber beim Kreisel der Impulsvektor nach Grösse und Richtung konstant bleibt, beschreibt bei der Kugel der Endpunkt desselben eine horizontale Ellipse.

In Tafel II ist auf dieselbe Weise die aus (33) und (35) resultierende elliptische Bahn des Drehvektorendpunkts konstruiert. Die Vektorkomponenten sind:

$$\begin{aligned}\pi&=\frac{a^2Q-b^2R}{abQ}\,\frac{r_1q_1}{\varkappa_1}\sqrt{1-x^2-x'^2}\\ \varkappa&=\frac{a^2Q-b^2R}{abQ}\,\frac{r_1}{\varkappa_1}(r_1-\rho_1x)+\frac{R}{Q}\,\frac{b}{a}\,\varkappa_1\\ \rho&=r_1x+\frac{R}{Q}\,(\rho_1-r_1x).\end{aligned}\qquad(37)$$

Die Gleichungen der natürlich nicht mehr horizontal liegenden Ellipse:

$$\begin{aligned}\frac{a^2Q^2(\pi^2+\varkappa^2)}{(a^2Q-b^2R)^2}+\frac{(Q\rho-M\rho_1)^2}{b^2(Q-R)^2}&=\frac{R^2b^4q_1^2+Q^2a^4r_1^2}{b^2(a^2Q-b^2R)^2}\\ \varkappa_1\frac{aQ\varkappa-bR\varkappa_1}{a^2Q-b^2R}+\rho_1\frac{Q\rho-R\rho_1}{b(Q-R)}&=\frac{r_1^2}{b}.\end{aligned}\qquad(38)$$

Auch in Tafel II sind die Komponentenellipsen durch unterbrochene Linien dargestellt, die resultierende Ellipse (A B C D) ausgeführt, die entsprechenden affinen Kreise der Kreiselbewegung sind in derselben Weise gezeichnet.

Bahn des Kugelmittelpunkts.

Aus dem affinen Zusammenhang folgt leicht, dass die Horizontalprojektionen der Ellipsen und Kreise sämtlich ähnliche Ellipsen sind, deren Halbachsen sich wie $\sqrt{q_1^2 + r_1^2} : \rho_1$ verhalten. In beiden Fällen (Tafel I und II) hat in der Horizontalprojektion die resultierende Ellipse Achsen, welche sich durch Subtraktion entsprechender Achsen der 2 Komponentenellipsen ergeben, während die Entfernung ihres Mittelpunkts von O sich aus den Entfernungen der Mittelpunkte der beiden Komponentenellipsen zusammensetzt.

Die Horizontalprojektion der Ellipse (38) hat noch eine weitere Bedeutung: Da der Radius vector von O zu einem ihrer Punkte $\sqrt{\pi^2 + \varkappa^2}$ die Geschwindigkeit des Kugelmittelpunkts angibt und seine Richtung auf der Fortschreitungsrichtung desselben senkrecht steht, so braucht man sie nur um einen rechten Winkel um OZ zu drehen, um den sogenannten Hodographen der Bahn des Kugelmittelpunkts zu erhalten. Damit ist diese zwar noch nicht genau bestimmt, da noch die Abhängigkeit zwischen x und t, d. h. Gleichung (22) in Betracht gezogen werden müsste; aber man kann zeigen, dass diese Abhängigkeit für die allgemeine Form der Bahnkurve keine wesentliche Bedeutung hat. Führt man nämlich entsprechend der Gleichung (23)

$$\frac{x_2 - x}{x - x_1} = y^2 = \operatorname{ctg}^2 \frac{u}{2}$$

oder

$$x = \frac{r_1 \rho_1 - q_1 \varkappa_1 \cos u}{q_1^2 + r_1^2}$$

ein, so durchlaufen die Endpunkte der Vektoren, wenn u von 0 bis 2π wächst, ihre elliptischen Bahnen vom Punkt A aus einmal.

Dann wird:

$$\frac{q_1 \varkappa_1 \sin u}{q_1^2 + r_1^2} = \sqrt{(x_2 - x)(x - x_1)}$$

und also aus (22)

$$a^2 \frac{Q}{R} \frac{du}{dt} = \sqrt{q_1^2 + r_1^2}\,(a^2 + x^2)$$

$$\text{bezw.} \quad a^{12} \frac{Q}{R} \frac{du}{dt} = \sqrt{q_1^2 + r_1^2}\,(a^{12} - x^2). \tag{39}$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dass $\frac{du}{dt}$ niemals $= 0$ werden kann, da $a^{12} = \frac{R}{R - Q} \cdot \frac{M + Q}{M}$ stets grösser als 1 und also auch grösser als x^2 ist. Die Vektorendpunkte durchlaufen somit auch der Zeit nach ihre Bahnen, ohne je umzukehren, stets in einer Richtung.

Die Gleichungen (39) zeigen zugleich, dass bei der Kreiselbewegung ($M = 0$; $a^2 = \infty$) $\frac{du}{dt}$ konstant wird, die Kreise also mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen werden. Der Winkel u bedeutet nämlich nichts anderes als den zum durchlaufenen Kreisbogen gehörigen Zentriwinkel.

Da aus dem Vorhergehenden folgt, dass der Winkel u mit der Zeit stets wächst oder stets abnimmt, so lässt sich jetzt aus der Hodographenellipse die allgemeine Form des Wegs ableiten, welchen der Kugelmittelpunkt einschlägt. Wir klassificieren je nach der Lage der Ellipse zum Punkt O: diese hängt wieder ab von der Neigung der Achse der besprochenen Kegel gegen die Vertikale, also von dem Verhältnis $\frac{\varkappa_1}{\rho_1}$.

1. Für $\frac{\varkappa_1}{\rho_1} = 0$ ergibt die Horizontalprojektion von (38) einen Kreis. Der Mittelpunkt beschreibt ebenfalls einen Kreis und zwar mit gleichförmiger Geschwindigkeit, da x und deshalb $\frac{du}{dt}$ konstant wird.

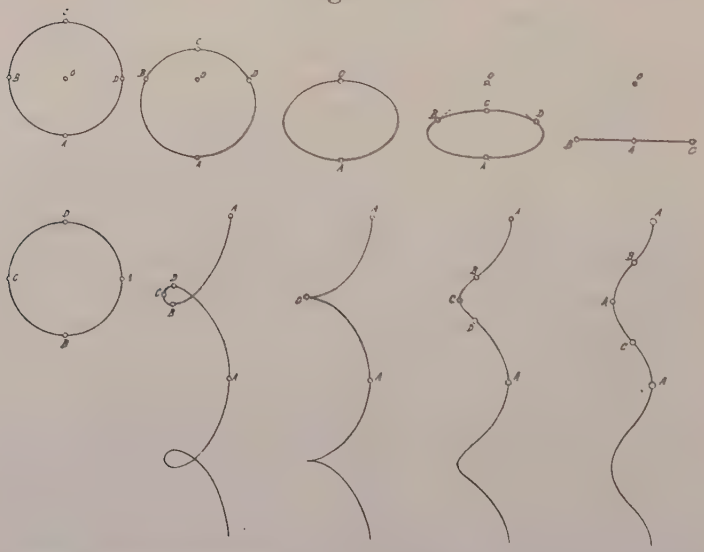
2. O liegt auf der Ellipse. Für diesen Fall, wo die Drehachse die vertikale Stellung erreicht, wird

$$\frac{\varkappa_1}{\rho_1} = \frac{(a^2Q - b^2R)q_1 r_1}{a^2Q r_1^2 + b^2R q_1^2}.$$

Man erhält eine cykloidenähnliche und endlich

3. für $\frac{\varkappa_1}{\rho_1} = \infty$ eine sinoidenähnliche Bahn, da hier der Hodograph durch eine geradlinige Strecke dargestellt wird. Im ersten Intervall muss die Kurve

Figur 2.



einer verschlungenen, im zweiten einer gestreckten Cykloide gleichen. Figur 2 gibt eine Übersicht über diese 5 Fälle. Die Hodographenellipse und die zu-

gehörige Bahn des Kugelmittelpunkts liegen jedesmal übereinander. Entsprechende Stellen in Bahn und Hodograph sind mit demselben Buchstaben bezeichnet. Befindet sich zum Beispiel beim 4. Fall der Kugelmittelpunkt in B, dem Wendepunkt seiner Bahn, so wird seine Geschwindigkeit durch den Vektor OB dargestellt, welcher die Hodographenellipse berührt.

Sind α und β die Koordinaten des Kugelmittelpunkts in Bezug auf ein horizontales Koordinatensystem, welches durch seine Anfangslage parallel zur Ξ- und H-achse gelegt ist, so ist:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \varkappa = \frac{a}{b}\frac{r_1}{\varkappa_1}(r_1 - \rho_1 x) + \frac{b}{a}\frac{R}{Q}(q_1^2 - \rho_1^2 + r_1\rho_1 x) \tag{40}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\pi = -\frac{a^2Q - b^2R}{abQ}\frac{r_1}{\varkappa_1}\sqrt{q_1^2 - \rho_1^2 + 2r_1\rho_1 x - (q_1^2 + r_1^2)x^2}.$$

Zur Integration verwenden wir wieder die Transformation (23) und die Abkürzungen (25), dann wird:

$$\frac{b}{a}\sqrt{\frac{R}{Q}(M+Q)(M+R)(q_1^2+r_1^2)}\,d\alpha - 2\frac{D + Ey^2}{A^2y^4 + 2B^2y^2 + C^2}dy$$

wo:

$$D = (M+Q)r_1(r_1\varkappa_1 - q_1\rho_1) + (M+R)q_1(q_1\varkappa_1 + r_1\rho_1)$$
$$E = (M+Q)r_1(r_1\varkappa_1 + q_1\rho_1) + (M+R)q_1(q_1\varkappa_1 - r_1\rho_1).$$

Mit den Hilfsintegralen (26) erhält man dann:

$$\frac{b}{a}\sqrt{\frac{R}{Q}(M+Q)(M+R)(q_1^2+r_1^2)}\,\alpha = \frac{D}{A}(z+z') + \frac{E}{C}(z-z')$$

und: (41)

$$\frac{\varkappa_1}{r_1}\beta = -\frac{a^2Q - b^2R}{bR}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

Ist aber $Q < R$, dann hat man wieder $-a^2$ durch a'^2 zu ersetzen und die Hilfsintegrale (28) zu verwenden. Die Gleichungen der Bahn des Kugelmittelpunkts sind dann:

$$\frac{b}{a}\sqrt{\frac{R}{Q}}(M+Q)(M+R)(q_1^2+r_1^2)\alpha$$
$$= [(M+Q)r_1^2+(M+R)(\varkappa_1^2-\rho_1^2)](\zeta^1-\zeta)-a^1(Q-R)r_1\rho_1(\zeta^1+\zeta) \tag{42}$$
$$\frac{\varkappa_1}{r_1}\beta = -\frac{a^{1\,2}Q-b^{1\,2}R}{bR}\log\sqrt{\frac{a^1-x}{a^1+x}}.$$

Der besondere Fall, wo $\rho_1 = 0$ ist, d. h. die Körperachse und die Drehachse zu gleicher Zeit in horizontale Lage kommen, und wo nach dem Gesagten die Bahn von O einer Sinuslinie gleichen muss, soll noch eingehender durchgeführt werden, weil dabei die Integrale sehr viel einfacher werden als im allgemeinen Fall.

So ergibt die Integration von (22)

$$\sin c_0 t = \frac{a\sqrt{q_1^2-\varkappa_1^2x^2}}{q_1\sqrt{a^2+x^2}}$$
$$\cos c_0 t = \frac{x\sqrt{q_1^2+\varkappa_1^2a^2}}{q_1\sqrt{a^2+x^2}} \tag{43}$$

wobei:

$$c_0 = \frac{R}{Q}\frac{\sqrt{q_1^2+\varkappa_1^2a^2}}{a}.$$

Die Abhängigkeit der Winkel ϑ und φ von der Zeit drücken dann die einfachen Gleichungen aus:

$$c_0\cos\vartheta = \frac{bR}{aQ}q_1\cos c_0 t$$
$$\varkappa_1\sin\vartheta\cos\varphi = q_1\sin c_0 t.$$

Aus der ersten der Gleichungen (40) geht hervor, dass die Geschwindigkeit des Kugelmittelpunkts in der Hauptfortschreitungsrichtung (parallel zur Ξ-achse) konstant ist. Die entsprechenden Formeln sind:

$$\varkappa_1\frac{d\alpha}{dt} = \frac{a^2Qr_1^2+b^2Rq_1^2}{abQ}$$
$$\varkappa_1\frac{d\beta}{dt} = \frac{a^2Q-b^2R}{bR}r_1q_1\frac{c_0\sin c_0 t}{\sqrt{a^2\varkappa_1^2+q_1^2\sin^2 c_0 t}}.$$

Bei geeigneter Wahl der Anfangswerte lauten die Integralgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2 r_1^2 + b^2 q_1^2}}{q_1} \sin\left[\frac{\varkappa_1}{r_1}\frac{bR}{(a^2Q - b^2R)}\beta\right] &= \sin c_0 t \\ \sqrt{a^2 r_1^2 + b^2 q_1^2}\,\frac{\varkappa_1 bR}{a^2 Q r_1^2 + b^2 R q_1^2}\alpha &= c_0 t. \end{aligned} \tag{44}$$

Die Gleichung der Bahn wird übersichtlicher, wenn man:

$$x = b\frac{M}{Q}\frac{\varkappa_1}{r_1}\alpha \qquad y = b\frac{M}{Q}\frac{\varkappa_1}{r_1}\beta$$

einführt. Man kann sie dann schreiben:

$$\sin\frac{m}{n}x = m\sin y, \tag{45}$$

dabei bedeutet m den Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{a^2 r_1^2 + b^2 q_1^2}{q_1^2}} \text{ oder } \sqrt{\frac{R(M+Q)\frac{r_1^2}{q_1^2} + Q(M+R)}{M(Q-R)}}.$$

Derselbe ist stets > 1.

n ist die Kotangente des Winkels, unter dem die Kurve von der Ξ-achse geschnitten wird, und ist Abkürzung für:

$$\frac{a^2 Q r_1^2 + b^2 R q_1^2}{q_1 r_1 (a^2 Q - b^2 R)} \text{ oder } \frac{(M+Q)\frac{r_1}{q_1} + (M+R)\frac{q_1}{r_1}}{Q-R}.$$

n erreicht für $\frac{r_1}{q_1} = \sqrt{\frac{M+R}{M+Q}}$ seinen kleinsten Wert. Damit ist für den Winkel δ, unter dem der Kugelmittelpunkt die Hauptfortschreitungsrichtung kreuzen kann, eine obere Grenze bestimmt. Sie ergibt sich aus

$$n = \operatorname{ctg}\delta = \frac{2\sqrt{(M+Q)(M+R)}}{Q-R} = \frac{2 q_1 r_1}{q_1^2 - r_1^2}.$$

Dieser Grenzwinkel ist um so grösser, je grösser Q

und je kleiner R ist. Liegen aber alle Massen im Innern der Kugel, dann kann Q höchstens = M, und R = 0 werden. Auf der Kugeloberfläche liegen dann 2 Massenpunkte an entgegengesetzter Stelle. In diesem Fall würde

$$\operatorname{ctg} \delta = 2\sqrt{2}$$

werden, der Winkel δ also schon ziemlich klein. Man wird daher, um eine von einer Geraden stärker abweichende Bahn zu erhalten, Massen ausserhalb der Kugel anbringen und etwa mit einer Kugel von geringer Masse experimentieren, durch welche ein schwerer Stab stark überragend durchgesteckt ist.

Ist $Q < R$, dann ist x, y, m, n zu ersetzen durch ix', iy', im', $-n'$. Die Gleichung der Bahn schreiben wir dann mit Anwendung der Hyperbelfunktionen:

$$m' \operatorname{Sin} y' = \sin \frac{m'}{n'} x'. \qquad (46)$$

Der Minimalwert von n' wird:

$$\operatorname{ctg} \delta' = \frac{2\sqrt{(M+Q)(M+R)}}{R-Q}.$$

Liegen wieder alle Massen auf der Kugeloberfläche, so kann R höchstens = M werden; dann seien die Massen auf einem Grosskreis so verteilt, dass sie in Bezug auf 4 sich unter 45° schneidende Durchmesser symmetrisch liegen. Q wird in diesem günstigsten Fall $= \frac{1}{2} M$ und

$$\operatorname{ctg} \delta' = 4\sqrt{3},$$

der Winkel δ' ist also noch kleiner als im ersten Fall. Durch einen in der Kugel angebrachten schweren Ring wird man daher eine nur geringe Abweichung der Bahn des Mittelpunkts von einer Geraden erreichen und ausserhalb der Kugel lassen sich nicht leicht Massen in der angegebenen Weise anbringen, ohne

dass durch sie die Kugel in ihrer Bahn gehindert würde.

Aus den in der Figur (Tafel III und IV) mit Hilfe von Tafeln für den Fall $n = 1$ bezw. $n' = 1$ gezeichneten Kurven kann die wirkliche Gestalt der Bahn leicht abgeleitet werden. Man hat bloss die Ordinaten so zu verkürzen, dass $\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{n}$ wird. Während im 1. Fall schon $m = 1$ ($r_1 = o$; $q_1 = 0$) keine eigentliche Bewegung mehr liefert, kann im 2. m' jeden beliebigen Wert annehmen, da b'^2 im Gegensatz zu b^2 auch < 1 werden kann.

Das elliptische Integral.

Für den 3. Euler'schen Winkel liefern die Gleichungen (30):

$$f' = \frac{r - \rho \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{b} \left(\frac{a^2 Q - b^2 R}{a^2 R} r_1 + \frac{b^2 R}{a^2 Q} \frac{r_1 - \rho_1 x}{1 - x^2} \right).$$

Also:

$$- \sqrt{q_1^2 + r_1^2}\, df = \frac{\frac{Q}{bM} r_1 + b \frac{r_1 - \rho_1 x}{1 - x^2}}{\sqrt{(a^2 + x^2)(x_2 - x)(x - x_1)}}\, dx. \quad (47)$$

Bei der Behandlung des entstehenden elliptischen Integrals wählen wir zunächst den einfacheren 2. Fall, wo $Q < R$. Die Substitution (23) führt dann rasch zur Normalform des elliptischen Integrals 3. Gattung, wenn man noch:

$$y = \sqrt{\frac{a' - x_2}{a' - x_1}} \sin \varphi_1 \quad (48)$$

setzt.

Dann wird nämlich:

$$\frac{dx}{\sqrt{(a'^2 - x^2)(x_2 - x)(x - x_1)}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a'^2 - x_2^2}} \frac{dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{a' - x_1}{a' - x_2} y^2\right)\left(1 - \frac{a' + x_1}{a' + x_2} y^2\right)}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(a' - x_1)(a' + x_2)}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1}}.$$

Dabei ist:

$$k^2 = \frac{(a' + x_1)(a' - x_2)}{(a' + x_2)(a' - x_1)}.$$

Ferner ist:

$$\frac{r_1 - \rho_1 x}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{r_1 + \rho_1}{1 + x} + \frac{r_1 - \rho_1}{1 - x}\right]$$

$$= \frac{r_1 - \rho_1 x_1}{1 - x_1^2} - \frac{x_2 - x_1}{2}\left[\frac{r_1 + \rho_1}{(1 + x_1)^2 y^2 + (1 + x_1)(1 + x_2)}\right.$$

$$\left. - \frac{r_1 - \rho_1}{(1 - x_1)^2 y^2 + (1 - x_1)(1 - x_2)}\right]$$

$$= \frac{r_1 - \rho_1 x_1}{1 - x_1^2} - \frac{x_2 - x_1}{2}\left[\frac{r_1 + \rho_1}{(1 + x_1)(1 + x_2)} \frac{1}{(1 + n_1 \sin^2 \varphi_1)}\right.$$

$$\left. - \frac{r_1 - \rho_1}{(1 - x_1)(1 - x_2)} \frac{1}{(1 + n_2 \sin^2 \varphi_1)}\right]$$

wo

$$n_1 = \frac{(1 + x_1)(a' - x_2)}{(1 + x_2)(a' - x_1)}$$

$$n_2 = \frac{(1 - x_1)(a' - x_2)}{(1 - x_2)(a' - x_1)}.$$

Mit diesen Formeln lässt sich der Winkel f in der Normalform von Legendre ausdrücken, welche wir in die Jacobi'sche überführen. Man hat zu diesem Zweck, da n_1 und n_2 beide positiv sind:

$$n_1 = -k^2 \sin^2 \mathrm{am}(i a_1)$$

$$n_2 = -k^2 \sin^2 \mathrm{am}(i a_2)$$

zu setzen und erhält, wenn

$$u = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1}$$

$$\frac{1}{b}\sqrt{(a^1 - x_1)(a^1 + x_2)(q_1^2 + r_1^2)}\, f = \left(\frac{Q}{b^2 M} r_1 + \frac{r_1 - \rho_1 x_2}{1 - x_2^2}\right) u \quad (49)$$

$$- \frac{x_2 - x_1}{2}\left[\frac{r_1 + \rho_1}{(1 + x_1)(1 + x_2)} \frac{\sin am(a_1, k^1)\cos am(a_1, k^1)}{\Delta am(a_1, k^1)} i\Pi(u, ia_1)\right.$$

$$\left. - \frac{r_1 - \rho_1}{(1 - x_1)(1 - x_2)} \frac{\sin am(a_2, k^1)\cos am(a_2, k^1)}{\Delta am(a_2, k^1)} i\Pi(u, ia_2)\right].$$

Dabei ist

$$i\Pi(u, ia) = uiZ(ia) + \frac{1}{2} i \log \frac{\Theta(u - ia)}{\Theta(u + ia)}$$

und

$$Z(ia) = - tg\, am(a, k^1)\, \Delta am(a, k^1) + \frac{\pi a}{2KK^1} + Z(a, k^1).$$

Ist $Q < R$, dann führt die Substitution

$$y^2 = \frac{C}{A} \frac{1 - \cos\varphi_2}{1 + \cos\varphi_2} \quad (50)$$

zum Ziel.

Es wird mit den Abkürzungen (25)

$$\frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)(x_2 - x)(x - x_1)}} = - \frac{dy}{\sqrt{A^2 y^4 + 2B^2 y^2 + C^2}}$$

$$= - \frac{d\varphi_2}{\sqrt{2[(AC + B^2) + (AC - B^2)\cos^2\varphi_2]}}$$

$$= - \frac{d\varphi_2}{2\sqrt{AC}\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi_2}}.$$

Dabei ist:

$$k^2 = \frac{AC - B^2}{AC}.$$

Ferner wird:

$$\frac{r_1+\rho_1 x}{1-x^2}=\frac{r+\rho_1}{2(1+x)}+\frac{r_1-\rho_1}{2(1-x)} \qquad (51)$$

$$=\frac{A+C+(A-C)\cos\varphi_2}{2}\left[\frac{r_1+\rho_1}{D+E\cos\varphi_2}+\frac{r_1-\rho_1}{D^1+E^1\cos\varphi_2}\right]$$

wo

$$D=(1+x_2)A+(1+x_1)C \quad D^1=(1-x_2)A+(1-x_1)C$$

$$E=(1+x_2)A-(1+x_1)C \quad E^1=(1-x_2)A-(1-x_1)C.$$

Die rechte Seite von (51) lässt sich zerlegen in den ungeraden Teil:

$$-AC(x_2-x_1)\cos\varphi_2\left[\frac{r_1+\rho_1}{D^2-E^2+E^2\sin^2\varphi_2}-\frac{r_1-\rho_1}{D^{12}-E^{12}+E^{12}\sin^2\varphi_2}\right]$$

und den geraden:

$$\frac{A-C}{2}\left[\frac{r_1+\rho_1}{E}+\frac{r_1-\rho_1}{E^1}\right]$$

$$+AC(x_2-x_1)\left[\frac{D(r_1+\rho_1)}{E(D^2-E^2+E^2\sin^2\varphi_2)}-\frac{D^1(r_1-\rho_1)}{E^1(D^{12}-E^{12}+E^{12}\sin^2\varphi_2)}\right]$$

Also wird:

$$\frac{1}{b}\sqrt{q_1^2+r_1^2}\,df=-\sqrt{AC}\,\frac{x_2-x_1}{2}\left(\frac{r_1+\rho_1}{D^2-E^2+E^2\sin^2\varphi_2}\right.$$

$$\left.-\frac{r_1-\rho_1}{D^{12}-E^{12}+E^2\sin^2\varphi_2}\right)\frac{d\sin\varphi_2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_2}}$$

$$+\left[\frac{Q}{b^2M}r_1+\frac{A-C}{4\sqrt{AC}}\left(\frac{r_1+\rho_1}{E}+\frac{r_1-\rho_1}{E^1}\right)\right]\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_2}}$$

$$+\sqrt{AC}\,\frac{x_2-x_1}{2}\left(\frac{D(r_1+\rho_1)}{E(D^2-E^2+E^2\sin^2\varphi_2)}\right.$$

$$\left.-\frac{D^1(r_1-\rho_1)}{E^1(D^{12}-E^{12}+E^{12}\sin^2\varphi_2)}\right)\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_2}}.$$

Führt man jetzt ein: $\varphi_2 = \operatorname{am} u^1$

$$\frac{E^2}{D^2 - E^2} = n = -k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia)$$

$$\frac{E^{1\,2}}{D^{1\,2} - E^{1\,2}} = n^1 = -k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia^1)$$

so wird:

$$\sqrt{k^2 + n} = k \cos \operatorname{am}(ia) = \frac{k}{\cos \operatorname{am}(a, k^1)}$$

und: $$\frac{E}{D} = \frac{ik \sin \operatorname{am}(ia)}{\Delta \operatorname{am}(ia)} = \frac{k \sin \operatorname{am}(a, k^1)}{\Delta \operatorname{am}(a, k^1)}.$$

Damit erhält man:

$$\frac{1}{b}\sqrt{q_1^2 \cdot r_1^2}\, f = \left[\frac{Q}{b^2 M} r_1 + \frac{A - C}{4\sqrt{AC}}\left(\frac{r_1 + \rho_1}{E} + \frac{r_1 - \rho_1}{E^1}\right)\right] u^1$$

$$+ \frac{x_2 - x_1}{8\sqrt{AC - B^2}}\left[\frac{r_1 + \rho_1}{(1 + x_1)(1 + x_2)} \cos \operatorname{am}(a, k^1)\right.$$

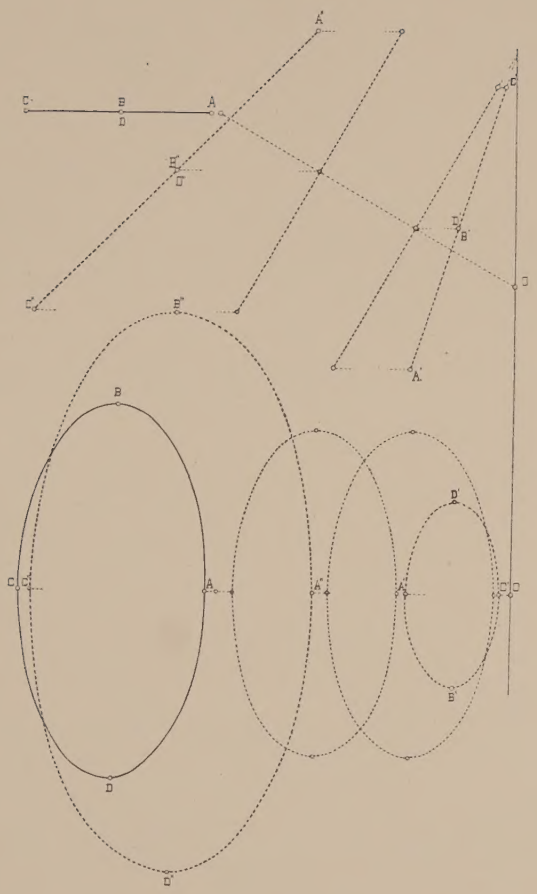
$$\left.\left(\operatorname{arctg} \frac{k \sin \operatorname{am} u^1}{\cos \operatorname{am}(a, k^1) \Delta \operatorname{am} u^1} + i\Pi(u^1, ia)\right)\right. \qquad (52)$$

$$- \frac{r_1 - \rho_1}{(1 - x_1)(1 - x_2)} \cos \operatorname{am}(a^1, k^1)$$

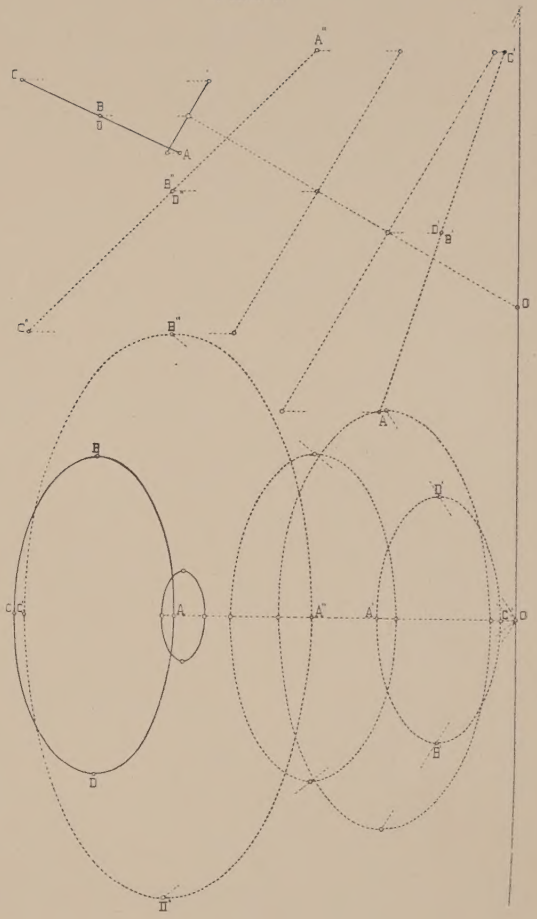
$$\left.\left(\operatorname{arctg} \frac{k \sin \operatorname{am} u^1}{\cos \operatorname{am}(a^1, k^1) \Delta \operatorname{am} u^1} + i\Pi(u^1, ia^1)\right)\right].$$

Mit Hilfe von f lässt sich endlich auch noch p und q sowie γ_1 und γ_2 nach bekannten Formeln ausdrücken.

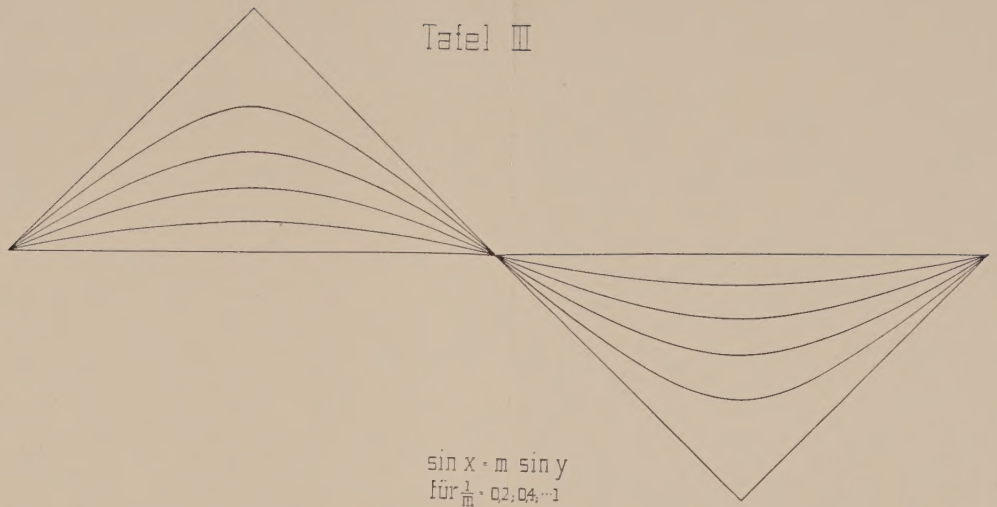
Tafel I



Tafel II

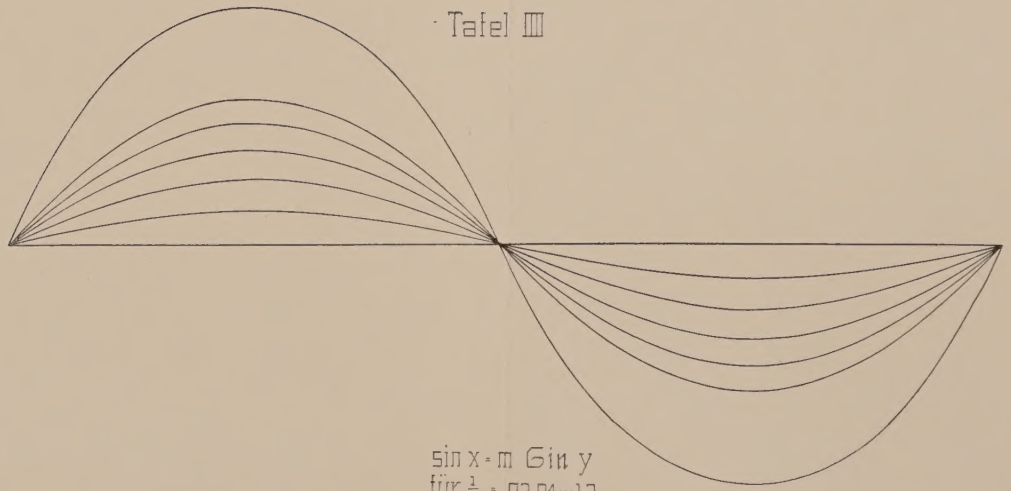


Tafel III



$\sin x = m \sin y$
für $\frac{1}{m} = 0{,}2; 0{,}4; \cdots 1$

Tafel III



$\sin x = m \operatorname{Sin} y$
für $\frac{1}{m} = 0{,}2; 0{,}4; \cdots 1{,}2.$